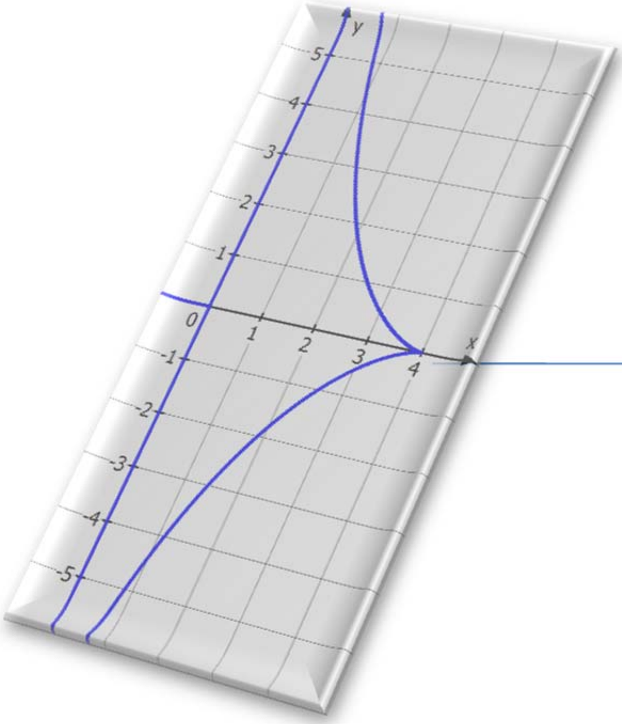


Traktrix

Text Nr. 54110

Stand 25. April 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Traktrix ist eine Kurve für gehobene mathematische Ansprüche. Interessant ist schon ihre „mechanische“ Entstehung, weshalb man sie auch Schleppkurve nennt.

Hier kommen die hyperbolischen Funktionen sinh, cosh und tanh zum Einsatz, die man in der Schule umgeht. Sogar deren Umkehrfunktion Arsinh(x) kommt vor …(Area sinus hyperbolicus)

Wenn es dann um Integrationsaufgaben geht, dann hört der Spaß auf ---

Die verwendeten Methoden stehen im Text 54011 Differentialgeometrie.

Ein MUSS für Studenten, denn diese Analysis hat es in sich.

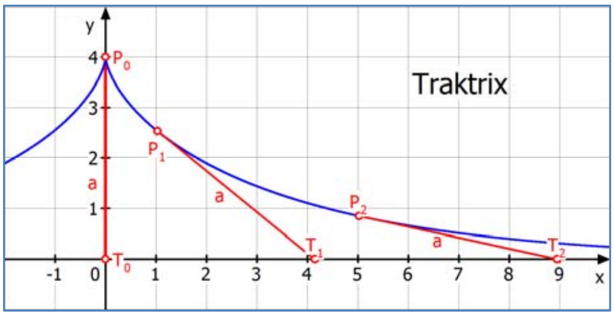
Inhalt

1	Vorschau	3
2	Beweis der charakteristische Eigenschaft einer Traktrix	4
3	Geometrische Herleitung zweier Parametergleichungen für die Traktrix	6
	Lösung der *Differentialgleichung*	6 und 7
4	Herleitung der Koordinatengleichung einer Traktrix	8

Die Traktrix (Schleppkurve)

1 Vorschau

Mögliche Parametergleichungen:



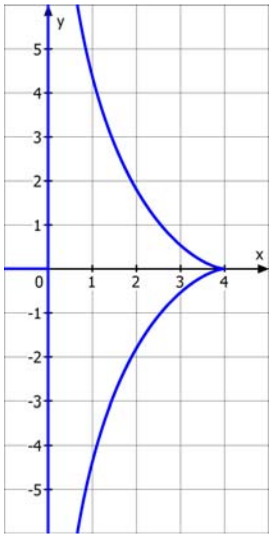
(1) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - a \cdot \tanh\left(\frac{t}{a}\right) \\ \dfrac{a}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)} \end{pmatrix}$ oder

(2) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\cosh(t)} \\ at - a \cdot \tanh(t) \end{pmatrix}$ oder

(3) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) + a \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ a \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ oder

(4) $\vec{x}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{pmatrix}$

Hier sind x- und y-Richtung gegenüber (2) vertauscht:



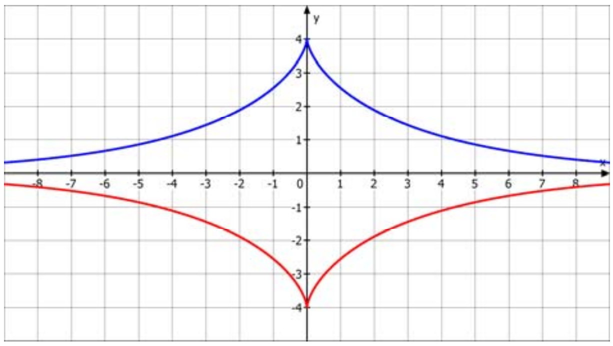
Koordinatengleichung für (4)

$y = a \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$

Und hier eine doppelte Traktrix:

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) + 4 \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ 4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ (obere Traktrix)

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) + 4 \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ -4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ (untere Traktrix)



Charakteristische Eigenschaft einer Traktrix

Die Traktrix beschreibt die Bahn eines Punktes, der mittels einer Stange gezogen wird.

Die Ausgangslage ist $P_0(0 \mid a)$, der „gezogene“ Punkt, in der Abbildung ist a = 4.

Der „Zieher“ ist $T_o(0 \mid 0)$. Er wandert nach rechts und zieht damit $P_ü$ entlang der Bahnkurve.

Dabei zeigt die Verbindungslinie stets auf den Traktor T zu.

Bei einer Traktrix haben also alle Tangentenabschnitte vom Kurvenpunkt bis zum „ziehenden“ Punkt auf der Asymptote (das ist auf der oberen Abbildung die x-Achse) **die gleiche Länge a.**

2 Beweis der charakteristischen Eigenschaft

Bei einer Traktrix haben also alle Tangentenabschnitte vom Kurvenpunkt bis zum „ziehenden“ Punkt auf der Asymptote die gleiche Länge a.

Beweis, dass die Strecken P_iT_i alle dieselbe Länge a haben:

Ableitung von $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cdot\cos(t) + a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ a\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}(t) = -a\cdot\sin(t) + \frac{a}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} = -a\cdot\sin(t) + \frac{a}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -a\cdot\sin(t) + \frac{a}{\sin(t)}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{-a\cdot\sin^2(t) + a}{\sin(t)} = \frac{a\left(1-\sin^2(t)\right)}{\sin(t)} = a\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}$$

Erklärung: $f(t) = \ln(u(t))$ hat die Ableitung $f'(t) = \frac{1}{u(t)}\cdot u'(t)$, daher ist

$$\ln(\tan(t))' = \frac{1}{\tan(t)}\cdot\tan'(t) = \frac{1}{\tan(t)}\cdot\frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Da aber das Argument nicht t sondern $\frac{t}{2}$ lautet, kommt noch eine innere Ableitung $\frac{1}{2}$ dazu. Dann wird $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ verwendet und eine Halbwinkel-Formel.

$$\dot{y}(t) = a\cdot\cos(t)$$

Daraus folgt für die Tangentensteigung:

$$m = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{a\cdot\cos(t)}{a\cdot\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}} = \cos(t)\cdot\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$$

Damit ist auch gezeigt, dass der Parameterwert der Kurve identisch ist mit dem Steigungswinkel.

Beliebiger Kurvenpunkt: $P\left(a\cos(t) + a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \mid a\cdot\sin(t)\right)$

Tangente in P: $y - a\cdot\sin(t) = \tan(t)\cdot\left(x - a\cdot\cos(t) - a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

y = 0: $-a\cdot\sin(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cdot\left(x - a\cdot\cos(t) - a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$

$$-a = \frac{1}{\cos(t)}\cdot\left(x - a\cdot\cos(t) - a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$$

$$-\cancel{a\cdot\cos(t)} = x - \cancel{a\cdot\cos(t)} - a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$x = a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad \text{also} \quad T\left(a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \mid 0\right)$$

Länge der Strecke PT: $\Delta x^2 = \left(a\cos(t) + a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) - a\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)^2 = a^2\cdot\cos^2(t)$

$$\Delta y^2 = \left(a\cdot\sin(t) - 0\right)^2 = a^2\cdot\sin^2(t)$$

$$\overline{PT} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{a^2\cdot\cos^2(t) + a^2\cdot\sin^2(t)} = \sqrt{a^2\cdot\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)} = \sqrt{a^2} = |a|$$

3. Geometrische Herleitung dieser Gleichungen für die Traktrix

$\vec{x}(t) = a \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cosh(t)} \\ at - a \cdot \tanh(t) \end{pmatrix}$

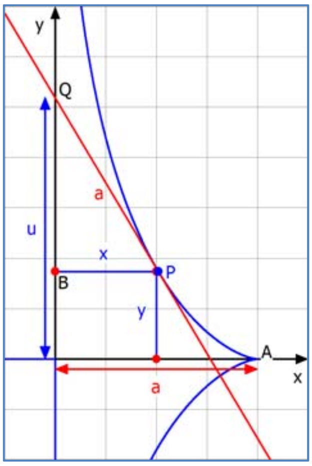


Abb. 5

Die konstante Stange, die von Q entlang der y-Achse geschleppt wird, habe die Länge a. Sie entspricht der Strecke PQ oder OA.

Die momentanen Koordinaten von Q seien $Q(0 \mid u)$.

Der laufende Kurvenpunkt sei $P(x \mid y)$.

Nach Pythagoras gilt: $a^2 = x^2 + (u - y)^2$. (1)

Da die Stange stets entlang der Tangente verläuft, ist deren Steigung

einerseits y', andererseits $y' = \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u-y}{x}$

Also gilt: $y' = \frac{u-y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad u - y = x \cdot y'$

Einsetzen in (1): $a^2 = x^2 + (x \cdot y')^2 = x^2 + x^2 \cdot y'^2$

Daraus erhält man $x^2 \cdot y'^2 = a^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$, also $y' = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

Für den oberen Kurvenbogen hat man fallende Tangenten, dann gilt das Minuszeichen, usw.

Die zugehörige Stammfunktion ist schwer zu berechnen.

Ich zeige hier zwei Lösungen, auf die man selbst wohl kaum kommen kann. Aber man sollte sie verstehen können. Es werden allerdings diese Kenntnisse benötigt: Substitutionsmethode und partielle Integration.

Hinweis für die folgende Rechnung:

Man beginnt mit einem Erweiterungstrick, mit dessen Hilfe man das kompliziertere Integral in eine Summe aus zwei Integralen zerlegen kann. Diese werden dann getrennt mit viel Aufwand berechnet.

Das erste Ergebnis ist $y = -\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = a \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{ax} - \sqrt{a^2 - x^2}$

Das zweite ist $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cosh(t)} \\ at - a \cdot \tanh(t) \end{pmatrix}$

Dann wird zusammengesetzt.

1. Lösung der Differentialgleichung durch Integration mit einem Erweiterungstrick.

Zuerst erweitert man den Bruch mit der bereits vorhandenen Wurzel, was dazu führt, dass man das Integral in zwei andere zerlegen kann, die dann mit geeigneten Substitutionen „berechenbar" sind.

$$y = \boxed{-\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx} = -\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int \frac{\left(a^2-x^2\right)}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\underbrace{\int \frac{a^2}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx}_{J1} + \underbrace{\int \frac{x^2}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx}_{J2}$$

1. Teilintegral mit Ergebnis: $J_1 = \int \frac{a^2}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C_1$

Beweis durch diese Substitution: $\boxed{x = \frac{1}{z}} = z^{-1} \Rightarrow x' = -z^{-2} = \frac{dx}{dz} \Rightarrow dx = -\frac{1}{z^2}\cdot dz$

$$J_1 = \int \frac{a^2}{x\cdot\sqrt{a^2-x^2}}dx = -a^2\int \frac{1}{\frac{1}{z}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{z^2}}}\frac{1}{z^2}dz = -a^2\int \frac{1}{z\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{z^2}}}dz = -a^2\int \frac{1}{\sqrt{z^2a^2-1}}dz =$$

$$= -a^2\int \frac{1}{a\sqrt{z^2-\frac{1}{a^2}}}dz = -a\int \frac{1}{\sqrt{z^2-\frac{1}{a^2}}}dz.$$

Zur Vereinfachung ersetze ich im Radikanden $\frac{1}{a^2}$ durch k^2.

Dann berechne ich das Integral $J_3 = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-k^2}}dz$ weiter mit der nächsten

Substitution $\boxed{\sqrt{z^2-k^2} = t-z} \Rightarrow z^2-k^2 = t^2-2tz+z^2$ *Wer wohl darauf kommt?*

$$-k^2 = t^2-2tz \Rightarrow 2tz = t^2+k^2 \Rightarrow z = \frac{t^2+k^2}{2t}$$

Damit wird $\sqrt{z^2-k^2} = t-\frac{t^2+k^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2-k^2}{2t} = \frac{t^2-k^2}{2t}$

$$z' = \frac{2t\cdot 2t-2\cdot\left(t^2+k^2\right)}{4t^2} = \frac{2t^2-2k^2}{4t^2} = \frac{t^2-k^2}{2t^2}$$ Also ist $dz = \frac{t^2-k^2}{2t^2}\cdot dt$

$$J_3 = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-k^2}}dz = \int \frac{2t}{t^2-k^2}\cdot\frac{t^2-k^2}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|$$

1. Rücksubstitution von t nach z: $\sqrt{z^2-k^2} = t-z \Rightarrow t = z+\sqrt{z^2-k^2}$

Damit folgt $J_3 = \ln\left|z+\sqrt{z^2-k^2}\right|$ mit $k^2 = \frac{1}{a^2}$

2. Rücksubstitution von z nach x: $z = \frac{1}{x}$ und ohne Betrag, da mit x > 0 auch z > 0 usw.

$$J_3 = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax}\right) = \ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$$ ergibt nun:

$J_1 = -a\cdot J_3 = -a\cdot\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$ und natürlich + C_1.

2. Teilintegral mit Ergebnis: $J_2 = \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C_2$

Vereinfachung durch eine Standardsubstitution:

$$u = a^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2x\cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot dx = -\tfrac{1}{2}\cdot du$$

$$J_2 = -\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{du}{u^{1/2}} = -\tfrac{1}{2}\cdot\int u^{-1/2}du = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u}$$

Rücksubstitution von u nach x: $J_2 = -\sqrt{a^2-x^2}$ und natürlich + C_2.

Gesamt-Integral: $y = -\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \boxed{-J_1 + J_2} = a\cdot\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{ax} - \sqrt{a^2-x^2}$

Die fehlende Integrationskonstante kann durch die Voraussetzung $y(a) = 0$ zu C = 0 bestimmt werden.

2. Lösung mit cosh(x): $y = -\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$

Jetzt kommt der große Trick: Man stellt eine Parametrisierung durch eine hyperbolische Substitution her.

$$x = \frac{a}{\cosh(t)} = a\cdot\cosh^{-1}(t)$$

$$x' = -a\cdot\cosh^{-2}(t)\cdot\cosh'(t) = -a\cdot\cosh^{-2}(t)\cdot\sinh(t) = -a\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$$

$$dx = -a\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}\cdot dt$$

Das ergibt dann:

$$y = -\int\frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\cosh^2(t)}}}{\frac{a}{\cosh(t)}}\cdot\frac{-a\cdot\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt = a\cdot\int\frac{\frac{\sqrt{\cosh^2(t)-1}}{\cancel{\cosh(t)}}}{\frac{1}{\cancel{\cosh(t)}}}\cdot\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt = a\cdot\int\sqrt{\sinh^2(t)}\cdot\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt =$$

$$y = a\cdot\int\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}dt = a\cdot\int\frac{\cosh^2(t)-1}{\cosh^2(t)}dt = a\cdot\int\left(1-\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)dt = a\cdot[t-\tan(t)]$$

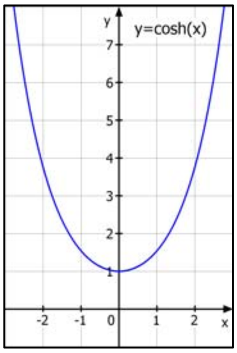
Die Integrationskonstante wird C = 0, wenn man die Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und $y(0) = 0$ wählt.

Ergebnis: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cosh(t)} \\ at - a\cdot\tanh(t) \end{pmatrix}$

Es gibt weitere Varianten von Formeln, je nach Ansatz und Vorgehen …

4. Herleitung der Koordinatengleichung einer Traktrix

Man kann aus den Parametergleichungen den Parameter a eliminieren:



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)} \\ t - a \cdot \tanh\left(\frac{t}{a}\right) \end{pmatrix}$$

Aus der x-Gleichung folgt $x = \frac{a}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)} \Leftrightarrow \cosh\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{a}{x}$.

Die Funktion cosh ist für x > 0 umkehrbar, hier also für $t \geq 0$:

Das ergibt: $\frac{t}{a} = \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x}\right)$ („Area-Cosinus-Hyperbolicus")

Und $t = a \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x}\right)$ (1)

Zusammenhang zwischen sinh und cosh: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (Formelsammlung)

Also folgt: $\sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$

Angewandt auf unser Problem: $\sinh^2\left(\frac{t}{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{t}{a}\right) - 1 = \frac{a^2}{x^2} - 1 = \frac{a^2 - x^2}{x^2} \quad | \sqrt{\ }$

$$\left|\sinh\left(\frac{t}{a}\right)\right| = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x^2}}$$

Mit x > 0 und $\frac{t}{a} > 0$ folgt: $\sinh\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

Damit bildet man $\tanh\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{\sinh\left(\frac{t}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x \cdot \frac{a}{x}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (2).

Setzt (1) und (2) man in x(t) ein: $\boxed{y = a \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}}$

Das Schaubild ist nur der obere Bogen: